

# Enseñanza-Aprendizaje del Concepto Límite: una comparación entre la Evolución Histórico-Epistemológica del Concepto y el Currículo de primer año de Ingeniería en la Unicit-Chile

*Eduardo Orellana R.  
Lorenzo Blanco J.*

## Resumen

El presente trabajo se inserta dentro de una investigación más amplia que tendrá como objetivo describir y analizar los errores en la enseñanza/aprendizaje del concepto de límites de los estudiantes de primer año de ingeniería de la Unicit Chile. En un primer paso, hemos analizado el currículo de secundaria y universidad en relación al concepto límite, así como su historia y epistemología.

La comparación de los dos documentos obtenidos nos permite describir y analizar las principales variables que son necesarias para la construcción del concepto de límite y su registro en el currículo. En este informe presentamos las conclusiones que obtenemos al realizar dicha comparación para determinar los conceptos y procesos

matemáticos de la investigación.

El trabajo a realizar utilizará herramientas de la metodología cualitativa y cuantitativa que nos permita describir los principales errores y dificultades que los estudiantes de primer año de ingeniería tienen en relación a esos conceptos y proceso matemáticos presentes en la construcción del concepto de límite. En esta comunicación presentamos un avance de las herramientas metodológicas que serán utilizadas en la investigación.

Los resultados previsibles serán utilizados para realizar diferentes propuestas que mejoren el currículo correspondiente y que puedan ser utilizadas en el aula para obtener un mayor rendimiento académico.

### Summary

The present work inserts inside an investigation more wide that it will have as aim describe and analyze the mistakes in the education / learning of the concept of limits of the students of the first year of engineering of the Unicit Chile. In the first step, we have analyzed the curriculum of secondary and university in relation to the concept limit, as well as his history and epistemology.

The comparison of both obtained documents allows us to describe and to analyze the principal variables that are necessary for the construction of the concept of limit and his search in the curriculum. In this report let's sense beforehand the conclusions that we obtain on having realized the above mentioned comparison to determine the concepts and mathematical processes of the investigation.

The work to realizing will use tools of the qualitative and quantitative methodology that allows us to describe the principal mistakes and difficulties that the students of the first year of engineering have in relation to these concepts and process mathematical presents in the construction of the concept of limit. In this communication let's sense beforehand an advance of the methodological tools that will be used in the investigation.

The predictable results will be used to realize different offers that improve the corresponding curriculum and that could be used in the classroom to obtain a greater academic performance.

**Palabras clave:** Historia, Epistemología, concepto de límite, currículo.

---

### Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación mucho más amplio que da continuidad a uno previo y que tiene como finalidad mostrar una comparación entre la evolución histórico-epistemológica del concepto límite y el currículo en Chile en matemáticas para los niveles de secundaria, prueba de ingreso a la universidad (P.S.U.) y primer semestre

en la carrera de ingeniería en la Unicit. Trabajos referente al estudio del concepto existen varios, entre los más relevantes se pueden considerar los de Cornu (1991) y Sierpinska (1985), en ellos se manifiesta la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite que se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos

cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática.

Desde la perspectiva educativa el análisis del concepto límite permite dilucidar que su enseñanza-aprendizaje se ha convertido en un problema para la educación matemática. Entre los posibles problemas que presenta su enseñanza-aprendizaje es el referido a la concepción sobre las matemáticas con que se asume esa enseñanza-aprendizaje. La mayoría de las veces no está inscrita en el estudio del cambio. Esta concepción es contraria a la histórica-epistemológica del desarrollo del concepto, ya que primero las nociones se utilizan para reconocerse y definirse lógicamente mucho tiempo después (19 siglos). Otro de los problemas que la enseñanza-aprendizaje del concepto es el de convertirlo en un conocimiento algorítmico desde la perspectiva algebraica debido a que son reducidos al manejo de manipulaciones algebraicas.

Las nociones de infinito, aproximación, variación como mecanismos de aproximación a la construcción lógica del concepto límite están presentes desde épocas muy tempranas en la Historia y Epistemología de las matemáticas. Se puede afirmar que existió en las distintas actividades matemáticas que se desarrollaron desde la antigua Grecia hasta su formalización llegando a nuestros

días y cuya concepción conforma la estructura matemática que conocemos. Ante esto último y para fines de una investigación, cabe necesario preguntarse, ¿por qué es necesario comparar la historia y epistemología del concepto límite y el currículo para los estudiantes de primer año de ingeniería?, en función de ello, en el proceso de enseñanza-aprendizaje actual, ¿qué elementos del desarrollo del concepto no se están atendiendo en el currículo de primer semestre de ingeniería?, por ende, ¿Es la práctica del currículo un elemento determinante en el logro de aprendizajes de calidad en los estudiantes de primer año?. El objetivo general de este trabajo es obtener información sobre los conceptos y procesos matemáticos que en específico tendríamos que considerar en una futura investigación acerca de los errores y dificultades en la construcción del concepto de límite, determinado del análisis comparativo entre historia-epistemología del concepto límite y, el currículo de primer año de ingeniería de la Unicit. Para llevar a cabo tal objetivo es necesario, entonces, conocer y describir el desarrollo histórico-epistemológico del concepto límite, como también conocer el marco curricular que orienta las prácticas de aula en los niveles del sistema educacional de secundaria, prueba de ingreso a la universidad y primer año de ingeniería en la Unicit en Chile. Sumado

a esto, describir y caracterizar un conjunto de elementos conceptuales, determinados del análisis comparativo entre la historia y epistemología del concepto y el currículo, para así finalmente, mejorar las prácticas de enseñanza–aprendizaje del concepto límite en primer año de ingeniería, dentro del contexto de una reestructuración del currículo en base al análisis comparativo.

### Metodología

El estudio metodológico de esta primera parte del trabajo está centrado en realizar un enfoque con el análisis comparativo entre historia y epistemología y, currículo en lo que respecta a la construcción del concepto límite. Por lo que, los ejes del estudio de la metodología son la historia, epistemología del concepto límite y el currículo en la carrera de ingeniería. La importancia de considerar en el proceso de enseñanza–aprendizaje un estudio histórico-epistemológico del concepto en matemáticas lo argumenta Guzmán (1992) preguntando, *¿Qué conocimientos sobre la historia de las matemáticas y sobre un tema en particular se puede ofrecer al estudiante?*, a lo que responde:

- *Ofrecer una visión de la ciencia y las matemáticas como actividades humanas.*
- *Ofrecer un marco dentro del cual organizar los elementos de nuestro conocimiento matemático.*

- *Ofrecer una visión dinámica de la evolución de las matemáticas.*

- *Ofrecer reconocimiento de la interrelación de pensamiento matemático y la cultura en la sociedad humana: de la importancia de las matemáticas como parte de la cultura humana.*

- *Ofrecer una profunda comprensión técnica.*

- *Ofrecer tomar conciencia de lo especial en la vida de cualquier teoría matemática.*

Se desprenden del estudio del desarrollo del concepto en la historia y epistemología, desde los períodos de la Grecia antigua hasta el siglo XX, y, del currículo, el análisis de los programas y objetivos fundamentales para la enseñanza secundaria en Chile teniendo a modo de fuente el Ministerio de Educación (MINEDUC) que nos guiará en el análisis de preconcepciones al concepto límite, además de los programas y objetivos considerados en la prueba de selección universitaria (P.S.U.) con fuente el organismo dependiente de la Universidad de Chile en este proceso de selección (DEMRE) en este país. Estos dos enfoques, junto al objetivo del estudio convergen en el análisis de contenidos en base a criterios establecidos, como lo son el concepto de límite, su historia y epistemología y el currículo.

## Historia y Epistemología del concepto límite

Esta primera parte del estudio fue separada en cuatro períodos que datan desde los primeros indicios del concepto en la Grecia antigua hasta el siglo XIX de nuestra era. Son dichos períodos: la Grecia Antigua, el Siglo XVIII, Siglo XIX y Siglo XX. Consideraciones históricas como las de Boyer (1986) o de Ríbnikov (1987), sirven como guía a través del tiempo para dicho análisis.

*-De la Grecia Antigua.* El concepto límite como tal tiene su precedente en el infinito. La elaboración del concepto de límite, origina entre otras cosas, que pase a primer plano un concepto que se remontaba a épocas pretéritas: el infinito (Cobos, 2000). En aquel entonces la explicación de la revelación de lo inconmensurable de las magnitudes en la Grecia antigua, se centraba en *la prolongación ilimitada del proceso de búsqueda de una medida común, en lo infinitamente pequeño de la medida común, y ésta, debía estar contenida un número infinito de veces en las magnitudes que se comparan* (Ríbnikov, 1987). En razón a ello, lo relevante en aquel entonces, eran las ideas atomísticas de lo infinitésimo; se da importancia a las Paradojas de Zenón y al método de exahusión de Arquímedes, así como a la unicidad del límite; por primera vez se confrontan los métodos infinitesimales v/s los sistemas lógicos.

Las implicaciones más importantes a considerar, determinadas de esta primera etapa son que, lo importante eran las exigencias del entorno tangible, existen problemas donde sus soluciones requieren investigar métodos de pasos al límite, se agregan problemas geométricos. Los métodos se apoyan en un concepto intuitivo, los métodos infinitesimales son el punto de partida para los antiguos.

*-Del siglo XVIII.* Para los principales matemáticos de este período, como Euler, D'Alembert, Descartes, Bernoulli, lo esencial era argumentar que todo el análisis gira alrededor de las "*funciones*" y de las magnitudes variables. Así, se sustentaba que el tratamiento de los límites era por la forma de las variables y el cálculo de diferenciales. La representación era de carácter no algorítmico. Se consideraba la Geometría con aplicaciones empíricas y el concepto de límite. Las implicaciones más relevantes de este período son que el desarrollo del concepto límite se hizo complejo, existe la necesidad de una idea de dependencia funcional, la derivada aparece como símbolo de límites, también se encuentra la existencia del límite sustituida por el método algebraico. Se aceptan algoritmos especiales y se ocupan los pasos al límite con la teoría de los ceros, también, se considera la definición de límite unilateral.

-Del siglo XIX. Ya el desarrollo del concepto ha dejado atrás su concepción centrada en la realidad y toma cada vez mayor fuerza su esencia teórica. Las características más importantes de este período que tienen que ver con el concepto de límite son, que se contribuye a la teoría de variable real y de conjuntos con razonamientos filosóficos, cuestión defendida por Bolzano, por lo que las aplicaciones quedan atrás. El concepto de límite se construye como una teoría. Se elabora el pensamiento matemático y el razonamiento filosófico. Llega la introducción del criterio de convergencia y la continuidad de funciones. Las implicaciones más importantes de interés determinadas del siglo XIX son la reconstrucción de la estructura del contenido matemático, la fundamentación matemática del concepto y construcción teórica del concepto límite. La importancia de exigir métodos analíticos nuevos más exactos apoyados en puntos de partida más claros y rigurosamente definidos. Necesidad de utilizar métodos de la teoría de conjuntos y de la teoría de funciones de variable real.

-Del siglo XX. La característica principal de este período es que ya nos encontramos en el proceso final de la formalización del concepto límite. Es en este momento (aproximadamente a inicios del siglo XX) cuando el motor del análisis infinitesimal está en condiciones de dar marcha formal

a toda esta maquinaria basada en sus cimientos estructurales sobre el concepto de límite utilizado hasta la actualidad. Las características más relevantes de este período respecto al concepto tienen que ver con las definiciones y demostraciones que se usan para fundamentar el límite. Se utiliza la teoría de conjunto, también se determina la existencia del límite y se incorporan las ciencias exactas en un segundo plano, dándosele una primera importancia a la formalización teórica del concepto, por ende se reestructura el contenido matemático. Se introduce la teoría de número real. Las implicaciones determinadas de esto para el objeto de este trabajo, son entre otras, las de que no es posible vincular el concepto enteramente con lo práctico. Es necesaria la rigurosidad de número real (por medio del límite de sucesiones convergentes). El número real se debe considerar con la idea de infinito basado en la continuidad. Así, hay que considerar la teoría de límites en una forma muy rigurosa. La construcción del concepto de límite debe tener como base la teoría de número real.

### El concepto de límite en el currículo chileno

Luego de esta visión histórico-epistemológica del concepto límite, es necesario descubrir que consideran los currículos tanto, de secundaria, programas de admisión para la selección universitaria y los programas de primer año en las carreras de ingeniería de la Unicit en Chile. Por ende, dicho análisis se divide en estas tres partes. -*Currículo de Secundaria (o enseñanza media en Chile)*. Los tres contenidos ejes de este nivel se apoyan en el Álgebra de funciones, la geometría clásica (o Euclidiana) y en la Estadística y probabilidades. Las consideraciones más importantes que se desprenden de su estudio son cuestiones tales como que en este no existe en todo el programa de secundaria una introducción clara al concepto de límite, también, se puede notar una fuerte influencia algebraica de los contenidos. Se enfatiza en el currículo un desarrollo del pensamiento matemático, pero, no hay contenidos dirigidos explícitamente al concepto y que sean acordes a este énfasis dado durante todo el currículo (fuente MINEDUC, Chile). Un detalle de dichos programas y contenidos pueden ser obtenidos de la página web del ministerio de educación Chile, [www.mineduc.cl](http://www.mineduc.cl). -*Currículo y Prueba de selección Universitaria (P.S.U.)*. En ellos, no es posible encontrar

nada nuevo en cuanto a contenidos ya que son los mismos contenidos descritos en los programas de educación secundaria. Llama la atención que en estos si es posible descubrir, dentro de los objetivos, que se reconocen procedimientos algorítmicos rutinarios y que se demande una mayor cantidad de abstracción, por ende, los contenidos de secundaria son puestos a prueba ante problemas desconocidos que están presentes en esta prueba. También es posible obtener un detalle de los contenidos en la página web y que pertenece al organismo encargado del proceso de selección universitaria en Chile, [www.demre.cl](http://www.demre.cl).

-*Currículo de primer año de ingeniería en la Unicit (Chile)*. Como el centro medular de este trabajo trata del concepto límite, entonces, nuestra mirada se dirige a lo que este currículo trata respecto a dicho concepto. Principalmente este considera tres cuestiones medulares: calcular límites de sucesiones y funciones.

Aplicar teoremas. Aplicar levemente la definición para la derivada. El estudio delata una fuerte influencia de problemas de tipo algorítmico, esta clasificación esta considerada bajo la definición de Blanco (1993). El detalle de conceptos previos, conlleva a un futuro cuestionario en base a preguntas y problemas para una investigación más minuciosa y trabajada.

### Análisis comparativo entre la historia y epistemología y el currículo para el concepto de límite

Posteriormente al estudio, ya es posible realizar una comparación entre ambas líneas de trabajo y que nos pueden dar una idea más clara de las diferencias entre ambas. Una consideración histórica es que hasta los trabajos de G. Cantor sobre los fundamentos de la aritmética y más tarde sumados los de la obra de R. Dedekind "Continuidad y números irracionales", se tienen obras que perseguían un único objetivo: dar una teoría rigurosa del número real teniendo como base la teoría de límites, por lo que nace la pregunta, ¿se persigue este objetivo en el programa de la

Unicit para primer año de ingeniería?, es claro al comparar con el currículo, que no. No olvidemos que la teoría del número real le sirve como base a Weierstrass, para todo la construcción del análisis matemático. Formalmente hasta Cauchy (pasando por D'Alembert), el conjunto de los pasos al límite conocidos y definidos individualmente hasta entonces era completamente insuficiente. Como se sabe, actualmente el análisis exige la utilización de los métodos y resultados de la teoría de conjuntos y la teoría de funciones de variable real.

Dentro de las diferencias más importantes se pueden considerar las dadas en la siguiente tabla:

CURRÍCULO	HISTORIA
no relaciona directamente las concepciones de diferenciación e integración con el concepto de límite	relaciona directamente las concepciones de diferenciación e integración con el concepto límite
desarrollo algorítmico del concepto límite	desarrollo epistemológico del concepto límite
no muestra claridad respecto a la iniciación del concepto de límite	inicialmente existen verdades infinitésimas que reemplazan el concepto de límite
no hay evolución del concepto de límite desde el reconocimiento hasta definirse	se utilizan las nociones de límite para reconocerse y luego definirse
no relaciona la matemática con las necesidades prácticas de los estudiantes de ingeniería	se relaciona la matemática con las necesidades prácticas y la actividad del ser humano
no se nota una influencia de las ciencias naturales en el desarrollo del concepto límite	influencia de las ciencias naturales en el desarrollo del concepto límite
no se aprecia acondicionamiento histórico de la organización lógica de las matemáticas	existe un condicionamiento histórico de la organización lógica de las matemáticas
ausencia directa de límite como resolución de problemas mecánicos	desarrollo directo de límite como resolución general de los problemas mecánicos



es notoria la presencia de la técnica en las practicas del currículo	ingresa la técnica del cálculo en las prácticas del hombre como algo irremplazable
ausencia de demostración de la unicidad del límite	demostración de la propiedad de la unicidad del límite
no se utiliza el método de exahusión para casos directos de límites	uso general del método de exahusión con la demostración por reducción al absurdo para cada caso particular
ausencia completa de paradojas tales como las de Zenón para la búsqueda de soluciones a problemas que tengan que ver con el concepto de límite	uso de las paradojas de Zenón para buscar soluciones lógicamente perfectas a problemas relacionados con la idea intuitiva de límite
presencia algorítmica del concepto de límite en la actualidad en la carrera de ingeniería	en el tiempo de newton aparece el concepto de límite muy alejado de ser un concepto algorítmico
dependencia excesiva funcional para la concepción de límite	necesidad de una idea de dependencia funcional para la nueva concepción de límite
el currículo muestra todo su programa en torno a las funciones respecto al concepto de límite	para Euler todo lo que tiene que ver con límites gira alrededor de las magnitudes variables y sus funciones
presencia débil de la derivada como expresión de límite	la derivada aparece como un símbolo de expresión de límites
consideración de la definición de límite unilateral	aún queda la dificultad de la definición de límite unilateral
presencia notoria del método algebraico y algoritmos de resolución de cálculo de límites	lo existente hasta este momento se debía sustituir por el método algebraico o cualquier otro algoritmo especial
poca fundamentación del concepto límite en aplicaciones concretas	las críticas a la evolución del concepto venían de quienes fundamentaban el uso del concepto en las aplicaciones
utilización de estimaciones cualitativas tales como "cerca de"	no se aceptaban conceptos por la ausencia de estimaciones cualitativas
vacíos lógicos de elementos topológicos para el concepto	existían lagunas lógicas como por ejemplo la de número real

*Tabla 1. Aspectos diferenciadores más importantes entre el currículo en ingeniería de la Unicit y la historia y epistemología del concepto límite.*

## Conclusiones

En este trabajo se ha puesto de manifiesto, tanto en el análisis teórico (historia-epistemología-currículo-concepto de límite) como en el análisis del contraste entre todos ellos, que *el tratamiento que han recibido hasta el momento los conceptos no es el adecuado para conseguir una buena asimilación de los mismos*. Entre las conclusiones más significativas se pueden considerar las siguientes:

*-Conclusiones I.* Es necesario considerar el desarrollo Histórico-Epistemológico del concepto límite en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Hay que considerar limitadamente el concepto en cuestiones de velocidad, tangente, ya que puede llevar al fracaso cuando se pretendan justificar las bases del cálculo. Existe excesiva importancia al registro algebraico y poco a los registros numéricos. Hay demasiado énfasis de los procesos algorítmicos, induciéndose siempre en formulas que llevan a un resultado. Se tienen mínimos contenidos conceptuales previos al concepto en la enseñanza secundaria (o enseñanza media.). El lugar importante para la formalización del concepto, necesariamente es requerido.

*-Conclusiones II.* Respecto al currículo versus la historia y epistemología del concepto límite, existe una notoria diferencia entre ellas. De la primera se determina

una necesidad de reestructuración y actualización del currículo y como segunda cuestión, se nota un porcentaje mayoritario de cuestiones históricas-epistemológicas que no son consideradas. De la segunda se puede notar un desarrollo no lineal a través del tiempo del concepto límite y algo muy interesante es que más de la mitad del estudio histórico-epistemológico no coincide con el currículo.

*-Consecuencias del análisis comparativo.* Se percibe poca articulación entre el currículo vigente y la historia-epistemológica del concepto límite, por lo que, la planificación del currículo se hace débil, por lo que la crítica se centraría en esa la falta de análisis del currículo y de la historia del desarrollo del concepto límite detectada.

Finalmente, se pueden desprender del estudio una serie de proyecciones para un trabajo de investigación más exhaustivo de carácter exploratorio indagatorio y que nos presentan la necesidad de diseñar un currículo que asegure aprendizajes efectivos y de calidad en los estudiantes, determinándose con esto la reestructuración del currículo, para así, mejorar las prácticas docentes. La futura investigación debiera estar dirigida en base a preguntas ejes tales como, ¿qué contenidos básicos sobre el concepto límite tiene que poseer el currículo de primer año de ingeniería, para conducir procesos de enseñanza-aprendizaje de calidad y

equidad en la sociedad del conocimiento del siglo XXI?, o, atendiendo a los principios de una educación de calidad, diversidad y pluralidad, y en base a los currículos investigados ¿existe relación entre el aprendizaje de los estudiantes y desarrollo histórico-epistemológico del concepto límite?. Finalmente, ¿cuáles son los errores y dificultades en la enseñanza-aprendizaje del concepto límite en los estudiantes de primer año de ingeniería de la Unicit?.

*-Limitaciones del trabajo.* Algunas de las cuestiones de las conclusiones que se han de abortar para centrarse en otras, o que, incluso han surgido a partir de estas y que pueden ser el inicio de nuevas investigaciones, son como las que siguen:

1. Por motivos de tiempo, la utilización del concepto de límite para estudiar los de derivada e integral, no tuvo el peso que se esperaba. Se mencionan las cuestiones históricas, pero no son analizadas con detenimiento. Así, el problema de las aplicaciones del límite como aproximación óptima es también un problema abierto.

2. Al plantear este trabajo existe un interés, entre otras cosas, por la influencia de él en estudiantes de ingeniería y la adquisición del concepto de límite. Así, en la elaboración del análisis se contempla en especial, aquellos cursos de primer año

de ingeniería de la Unicit. El trabajo está dirigido a un curso de primer semestre de dicha carrera, donde el límite se estudia con mayor profundidad, dejando así abierta la cuestión de abordar el tema a estudiantes de cursos inferiores (últimos años de enseñanza media en Chile, secundaria en España).

3. El trabajo y su futura investigación está dirigido a los estudiantes de primer semestre de las carreras de ingeniería, esto no quiere decir que no se pueda llevar a cabo un trabajo o una investigación similar en otras modalidades de educación superior como los negocios, la arquitectura o, incluso, en la asignatura de cálculo de la carrera licenciatura en matemáticas donde aparezcan tales conceptos.

## Bibliografía

Blanco, L.J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Revista Épsilon*. N° 25 (pp 49- 60). Universidad de Sevilla.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza S.A., Madrid.

Cobos, J. (2000). *Francisco Vera Fernández de Córdoba. Tres obras inéditas*. Badajoz, Servicio de publicaciones Diputación de Badajoz.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. Proceedings PME-V. Grenoble. France. Vol. I, pp. 322-326.

Guzmán, M. (1992). *The origin and evolution of mathematical theories. Implications for mathematical education.* Selected lectures from the 7<sup>th</sup> international congress on mathematical education. Canadá pp 147 – 155.

Ríbnikov, K. (1987). Historia de las matemáticas. Editorial MIR, Moscú. Traducido del ruso por Concepción Valdés Castro.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics. Vol. 18, pp. 371-397